دانشکده علوم پایه

بررسی و مطالعه جواب‌های دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض
گرایش آنالیز

نگارش

محمد محمودی

استاد راهنما

دکتر مهدی چوبین

آبان ۱۳۹۴

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

همسر و فرزندانم

و

پدر و مادرم

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر ...، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر ... که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

محمد محمودی

آبان ۱۳۹۴

چکیده

در این پایان نامه، وجود و چندگانگی جواب‌های مثبت دسته‌ای از معادلات و دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی با شرط‌های مرزی همگن دیریکله را در دو مفهوم کلاسیک و ضعیف مورد بحث قرار می‌دهیم. فرض کنید Ω دامنه‌ای کراندار در $\mathbb{R}^N$ با مرز هموار $\partial\Omega$ است. ابتدا وجود جواب‌های مثبت دستگاه

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = \lambda_1\, a(x)f(v) + \mu_1\, \alpha(x)h(u), & x \in \Omega, \\ -\Delta_{q(x)}v = \lambda_2\, b(x)g(u) + \mu_2\, \beta(x)\gamma(v), & x \in \Omega, \\ u = 0 = v, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

را تحلیل می کنیم، که در آن $p(x) \in C^1(\mathbb{R}^N)$ تابعی متقارن شعاعی است، $\sup|\nabla p(x)| < \infty$، $1 < \inf p(x) \leq \sup p(x) < \infty$، $\Omega = B(0,R) \subset \mathbb{R}^N$ و $a, b, \alpha, \beta : [0, +\infty) \to (0, \infty)$ توابعی پیوسته‌اند.

واژگان کلیدی: جواب‌های مثبت، pـ لاپلاس، جواب‌های ضعیف، شرایط مرزی دیریکله

فهرست مطالب

پیشگفتار ح

فصل ۱: تعاریف و مقدمات ۱

۱ـ۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و شرط‌های مرزی دیریکله ۱

۱ـ۲ مفاهیم اولیه مورد نیاز ۲

فصل ۲: جواب‌های پایینی‌ـ‌بالایی ۴

۲ـ۱ جواب‌ها به مفهوم کلاسیک ۴

۲ـ۱ـ۱ معادله لاپلاس ۴

۲ـ۲ جواب‌ها به مفهوم ضعیف ۷

۲ـ۲ـ۱ حالت $f(0) > 0$: مساله مثبت گون ۷

۲ـ۲ـ۲ بررسی چندگانگی جواب ضعیف مثبت برای مساله ۸

فصل ۳: کلاسی از مسائل نیمه مثبت گون نامتناهی و جواب‌های کلاسیک مثبت ۹

۳ـ۱ حالت $g(u) = -au + bu$ ۹

۳ـ۲ حالت $g(u) = au^{p-1} - bu$ ۹

فصل ۴: کلاسی از دستگاه‌های با پارامترهای چندگانه ۱۱

۴ـ۱ لاپلاس با پارامترهای چندگانه دارای توابع وزن ۱۱

۴ـ۲ بررسی کلاسی از دستگاه‌های $n \times n$ با پارامترهای چندگانه ۱۱

۴ـ۳ لاپلاس با پارامترهای چندگانه دارای... . . . . ۱۲

مراجع ۱۳

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۴

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۵

پیشگفتار

آنالیز غیرخطی آن‌گونه که در حال حاضر از آن یاد می‌کنیم، زمینه تحقیقاتی نوینی است که بلوغ و تکامل آن به شکل امروزی مبتنی بر مطالعات چندجانبه و فراوان مسائل غیرخطی بوده است. بیشتر مسائل این‌چنینی، مسائل مطرح در زمینه‌های مختلف علوم غیر ریاضی بوده و بعضاً مسائلی از نوع ریاضیات محض را نیز در بر گرفته است. تقریباً در چهار دهه اخیر رشد آنالیز غیرخطی سرعت ویژه‌ای پیدا کرده و به یکی از اجزای مهم بدنه تحقیقات ریاضیات مدرن تبدیل شده است. بسیاری از مسائل مطرح در این زمینه، ریشه در هندسه، نجوم، فیزیک، شیمی، پردازش تصویر، مهندسی مکانیک، بیولوژی، ژنتیک و حتی رشته‌های علوم انسانی مانند اقتصاد و جمعیت‌شناسی دارد. نظریه‌ها و روش‌های مطرح در آنالیز غیرخطی در واقع زیرشاخه‌هایی از شاخه‌های اصلی موضوعات متنوعی به حساب می‌آیند. شاخه‌هایی چون معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، حساب تغییرات، سیستمهای دینامیکی، هندسه دیفرانسیل، گروه‌های لی، توپولوژی جبری، آنالیز تابعی خطی و غیرخطی، نظریه اندازه، آنالیز هارمونیک، آنالیز محدب، نظریه بازی‌ها، بهینه سازی و غیره. نکته قابل توجه این است که با پیشرفت در راستای زمان و حل مسائل موجود، به غنای شاخه‌های اشاره شده نیز کمک شایانی شده است.

مسائل خام مطرح در زمینه‌های مختلف علوم، در بسیاری از موارد، به زبان ریاضیات مدلسازی می‌شوند که اکثر این مدل‌ها به فرم معادلات دیفرانسیل معمولی و یا معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند. آن‌چه که قرار است در این .... بر پایه این روش در این پایان نامه انجام می‌گیرد.

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

در این فصل، را معرفی کرده و مثالی از کاربرد این معادلات در طبیعت را بیان می‌کنیم. سپس برخی از تعریف‌ها و مفاهیم لازم را که در طول پایان نامه مورد نیاز است، به اختصار بیان می‌کنیم.

۱ـ۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و شرط‌های مرزی دیریکله

آنالیز یکی از مهمترین شاخه‌های ریاضیات است که راهگشای بسیاری از مسائل فیزیک، مهندسی و ... می‌باشد. در این بین نقش معادلات دیفرانسیل در علوم دیگر انکار ناپذیر است. بسیاری از قوانین عمومی طبیعت در فیزیک، شیمی، زیست شناسی و نجوم طبیعی‌ترین بیان خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می‌یابند. هر رابطه‌ای بین تابع و متغیر مستقل و مشتقات تابع نسبت به متغیر مستقل را یک معادله دیفرانسیل می‌نامیم. معادلات دیفرانسیل به دو دسته تبدیل می‌شوند، اگر تابع فقط یک متغیر مستقل داشته باشد معادله دیفرانسیل را معمولی می‌نامیم و اگر بیش از یک متغیر داشته باشد آن را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌نامیم. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی عموماً در فیزیک محیط‌های پیوسته، مانند مسائل مشتمل بر میدان‌های الکتریکی، دینامیک سیالات، پخش و حرکت موجی، و همچنین در واکنش فرایندهای انتشار پیش می‌آیند و با نظریه معادله دیفرانسیل معمولی خیلی متفاوت و از هر لحاظ مشکل‌تر هستند. به عنوان یک مثال ساده از فرایند انتشار می‌توان رسانش گرما در یک جسم سخت را در نظر گرفت. فرض کنید $u(x,t)$ دما در زمان t و نقطه x در یک ناحیه Ω در جسم باشد. در این صورت معادله انتشار ناهمگن کلی به فرم

$$c\rho\, u_t = \nabla.(k\nabla u) + f(x,u,t)$$

را خواهیم داشت که در آن c و ρ مقادیری ثابت و k ضریب رسانایی گرمای جسم است، و $f(x,u,t)$ یک منبع خارجی است. هم اکنون اگر k را ثابت و منبع خارجی را مستقل از t و x فرض کنیم، یعنی $f(x,u,t) = f(u)$، و گرما هم در Ω به جز از طریق مرز Ω از دست نرود، آن‌گاه به مساله مقدارویژه غیرخطی

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda f(u(x)) \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0 \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{۱ـ۱}$$

منتهی می‌شویم که در آن λ پارامتری مثبت و Δ عملگر لاپلاس است که عبارت است از

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

مطالعه بر روی جواب‌های مثبت مساله (۱ـ۱) زمانی که Ω دامنه کرانداری در $\mathbb{R}^n$ با مرز هموار $\partial\Omega$ و f تابعی پیوسته روی $[0,\infty)$ است، در حالت مثبت گون ($f(0) > 0$) دارای تاریخی غنی (بیش از پنجاه سال) است(مراجع [۱، ۳] را ببینید). از بیست سال گذشته نیز مطالعاتی بر روی حالت نیمه مثبت گون ($f(0) < 0$) و مسائل نیمه مثبت گون نامتناهی ($\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$) شده است.

۱ـ۲ مفاهیم اولیه مورد نیاز

زیر مجموعه Ω از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ را یک دامنه می‌گوییم هرگاه باز و همبند باشد. مجموعه همه توابع پیوسته روی Ω را با $C(\Omega)$ نشان می‌دهیم. برای $k \in \mathbb{N}$، $C^k(\Omega)$ نشان دهنده همه توابعی است که مشتقات تا مرتبه kـام آنها روی Ω موجود و پیوسته است. همچنین $C^\infty(\Omega)$ رده همه توابعی است که برای هر $k \in \mathbb{N}$، به $C^k(\Omega)$ تعلق دارند. فضای همه توابع پیوسته روی Ω که محمل آن‌ها یک زیرمجموعه فشرده از Ω است را نیز با $C_0(\Omega)$ نشان می‌دهیم. به طریق مشابه $C_0^k(\Omega)$ و $C_0^\infty(\Omega)$ تعریف می‌شوند. برای $1 \le p < \infty$، $L^p(\Omega)$ را مجموعه همه توابع لبگ اندازه پذیر f تعریف شده روی دامنه Ω در نظر می‌گیریم که:

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty.$$

اغلب با توابعی سر و کار خواهیم داشت که لزوما روی دامنه Ω انتگرال پذیر نیستند ولی روی هر زیرمجموعه فشرده Ω انتگرال پذیرند.

تعریف ۱ـ۲ـ۱. مجموعه $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ عبارت است از همه توابع حقیقی مقدار و اندازه پذیر f روی دامنه Ω به طوری که برای هر زیرمجموعه فشرده K از Ω داشته باشیم:

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty.$$

تعریف ۱ـ۲ـ۲. فرض کنید $u(x_1, \cdots, x_n)$ یک میدان اسکالر تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ باشد. گرادیان u در هر نقطه از $\mathbb{R}^n$ برداری است در $\mathbb{R}^n$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla u = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

تعریف ۱ـ۲ـ۳. فرض کنید $\vec{u} = (u_1, \cdots, u_n)$ یک میدان برداری تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ باشد. واگرایی $\vec{u}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \nabla \,.\, \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}.$$

گزاره ۱ـ۲ـ۴ ((قضیه دیورژانس)). *فرض کنیم $\vec{u} = (u_1, \cdots, u_n)$ یک میدان برداری روی دامنه $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ باشد که $u_i \in C^1(\overline{\Omega})$ و $\vec{u} \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$. آن‌گاه:*

$$\int_{\partial\Omega} \vec{u} \,.\, \vec{n}\, ds = \int_\Omega \operatorname{div} \vec{u}\, dx$$

که در آن $\vec{n}$ بردار یکه برونسوی عمود بر سطح $\partial\Omega$ و ds نشان دهنده عنصر $(n-1)$ـ بعدی در $\partial\Omega$ است. همچنین اگر u تابعی در $C^2(\overline{\Omega})$ باشد، با جایگذاری $\vec{u} = \nabla u$ به دست می‌آوریم:

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u \,.\, \vec{n}\, ds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

فصل ۲

جواب‌های پایینی ـ بالایی

در این فصل جواب‌های پایینی و بالایی را شرح می‌دهیم. برای دامنه‌های بسیار کمی از مدل‌های خاص، شاید ما بتوانیم جواب صریحی از مساله با شرط‌های مرزی دیریکله ... را از طریق ساختن تابع گرین به دست آوریم، ولی این روش برای دامنه‌های کلی امکان پذیر نیست. برای دامنه‌های کلی هیچ روشی وجود ندارد، اما حل پذیری (وجود جواب) از لحاظ نظری برای مسائل مطرح می‌شود. در این زمینه روش‌های متعددی گسترش یافته است.

۲ـ۱ جواب‌ها به مفهوم کلاسیک

۲ـ۱ـ۱ معادله لاپلاس

در این بخش، معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{۲ـ۱}$$

تعریف ۲ ـ ۱ ـ ۱. تابع $\psi \in C^{۲}(\overline{\Omega})$ را یک جواب پایینی معادله (۲ ـ ۱) می‌نامیم هرگاه

$$\begin{cases} -\Delta\psi \leq f(\psi), & x \in \Omega, \\ \psi \leq ۰, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

و $Z \in C^{۲}(\overline{\Omega})$ را یک جواب بالایی معادله (۲ ـ ۱) می‌نامیم هرگاه

$$\begin{cases} -\Delta Z \geq f(Z), & x \in \Omega, \\ Z \geq ۰, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

یک جواب پایینی را در صورتی که یک جواب معادله نباشد، یک جواب پایینی اکید می‌نامیم و به طور مشابه جواب بالایی را که جواب معادله نیست، جواب بالایی اکید می‌گوییم.

دستگاه لاپلاس

در این بخش، دستگاه لاپلاس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -\Delta\underline{u} = \underline{F}(\underline{u}), & x \in \Omega, \\ \underline{u} = ۰, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{۲ ـ ۲}$$

که در آن $\underline{u} = (u_۱, ..., u_n)$ و $\underline{F} = (F_۱, ..., F_n) : [C([۰, \infty)^n)]^n \to \mathbb{R}^n$ است. تابع F شبه‌ـیکنوا[۱] نامیده می‌شود هرگاه برای هر u_i ثابت داشته باشیم

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_j} \geq ۰, \quad i, j \in \{۱, ۲, \cdots, n\}, \, i \neq j,$$

[۱] quasi-monotone

به عبارت دیگر، $F_i(u_1, u_2, ..., u_n)$ به ازای هر $j \neq i$ در u_j ناکاهشی باشد. در این صورت دستگاه (۲ـ۲) را یک دستگاه همیاری(تعاونی)[۲] می‌نامیم. می‌گوییم $(u_1, ..., u_n) \leq (v_1, ..., v_n)$ هرگاه به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، $u_i \leq v_i$.

معادله pـ لاپلاس

معادله pـ لاپلاس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{۲ـ۳}$$

که در آن Δ_p عملگر pـ لاپلاس و $f \in C^1(\Omega)$ است.

دستگاه pـ لاپلاس

دستگاه همیاری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 = F_1(u_1, u_2), & x \in \Omega, \\ -\Delta_q u_2 = F_2(u_1, u_2), & x \in \Omega, \\ u_1 = 0 = u_2, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{۲ـ۴}$$

[۲] cooperative

دستگاه $p(x)$ـ لاپلاس

دستگاه همیاری ۲×۲ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u_1 = F_1(x, u_1, u_2), & x \in \Omega, \\ -\Delta_{q(x)} u_2 = F_2(x, u_1, u_2), & x \in \Omega, \\ u_1 = 0 = u_2, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{۲ـ۵}$$

که در آن $\Delta_{p(x)}$ عملگر $p(x)$ـ لاپلاس است.

۲ـ۲ جواب‌ها به مفهوم ضعیف

مساله ..... را در نظر بگیرید و فرض کنید:

۲ـ۲ـ۱ حالت $f(0) > 0$: مساله مثبت گون

مساله ... را با فرضیات زیر در نظر بگیرید:

(ف۰) $f(0) > 0$.

(ف۱) $lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = 0$.

قضیه ۲ـ۲ـ۱. *فرض کنید (ف۰) و (ف۱) برقرار باشند. در این صورت مساله ... به ازای هر $\lambda > 0$ دارای یک جواب مثبت است.*

حالت $f(0) < 0$: مساله نیمه مثبت گون

مساله ... را در نظر بگیرید و فرض کنید:

(ف۲) عدد $K_0 > 0$ موجود است به طوری که برای هر $s > 0$، $f(s) \geq -K_0$.

(ف۳) $\lim_{s\to\infty} f(s) = \infty$.

توجه کنید که (ف۲) شامل حالت $f(0) < 0$ می باشد.

قضیه ۲ـ۲ـ۲. *فرض کنید (ف۱)ـ(ف۳) برقرار باشند. در این صورت مساله ... به ازای λ های بزرگ دارای یک جواب مثبت است.*

در نتایج بیان شده فوق، در ساختن جواب‌های پایینی، اولین مقدار ویژه λ_1 و تابع ویژه ϕ نقش اصلی را ایفا می‌کنند.

۲ـ۲ـ۲ بررسی چندگانگی جواب ضعیف مثبت برای مساله ....

قبل از بیان قضیه اصلی این زیربخش، ابتدا لم زیر را را بیان می‌کنیم که نقشی اساسی در ساختن جواب بالایی ضعیف اکید در اثبات قضیه را ایفا می‌کند.

فصل ۳

کلاسی از مسائل نیمه مثبت گون نامتناهی و جواب‌های کلاسیک مثبت

مثالی از یک مساله نیمه مثبت گون نامتناهی را در فصل ۲ بیان کردیم. در این فصل نمونه‌های دیگری از این قبیل مسائل را بررسی می‌کنیم.وند که در آن $\tilde{f}$ نسبت به u کاهشی است.

۳ـ۱ حالت $g(u) = -au + bu$

در این بخش ما حالت $g(u) := -au + bu^{۲} - du^{۳} - f(u)$.....

تبدیل عملگر لاپلاس به ...

فرض کنید (ف۱) و (ف۲) برقرار باشند. آن‌گاه ثابت‌های

۳ـ۲ حالت $g(u) = au^{p-۱} - bu$

در این بخش حالت... تحت شرایط مناسب بررسی می‌کنیم.

یک توسیع از معادله ...

در این بخش یک توسیع از ...

حال با استفاده از جواب‌های پایینی_ بالایی، قضیه زیر را ثابت خواهیم کرد.

قضیه ۳_۲_۱. *فرض کنید* (ف۳) *و* (ف۴) *برقرار باشند و* λ_1 *اولین مقدارویژه عملگر* $-\Delta_p$ *با شرط‌های مرزی دیریکله باشد..... دارای یک جواب مثبت است.*

برهان. فرض کنید σ همانند اثبات قضیه ... باشد،.... □

فصل ۴

کلاسی از دستگاه‌های با پارامترهای چندگانه

در این فصل وجود و چندگانگی جواب‌های ضعیف کلاسی از دستگاه‌های..... می‌پردازیم. نتایج این فصل در مقاله‌های ..... آمده است.

۴ـ۱ لاپلاس با پارامترهای چندگانه دارای توابع وزن

دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

قضیه ۴ـ۱ـ۱. *فرض کنید (ف۱)ـ(ف۳) برقرار باشند و $\Theta \neq \emptyset$. بعلاوه فرض کنید ....*

برهان. قضیه ۴ـ۱ـ۱ را با ساختن یک جواب پایینی ضعیف مثبت
به طور مشابه نتیجه می‌شود..... □

مثال ۴ـ۱ـ۲. فرض کنید

....

که در آن $A_i, B_j, C_k, D_l, p_i, q_j, r_k, d_l, c_1, c_2, c_3, c_4 \geq 0$، $p_i q_j < (p-1) \times (q-1)$، $r_k < (p-1)$ و $d_l < (q-1)$. آن‌گاه f، g، h و γ در شرط‌های قضیه .... صدق می‌کنند.

۴ـ۲ بررسی کلاسی از دستگاه‌های $n \times n$ با پارامترهای چندگانه

دستگاه $n \times n$ زیر را در نظر بگیرید: نتایج اصلی این بخش قضایای زیر می‌باشند.

قضیه ۴ـ۲ـ۱. *فرض کنید (ف۱)ـ(ف۳) برقرار باشند. آن‌گاه مساله.....*

برهان. فرض کنید $i = ۱, ۲, \cdots, n$. به ازای هر $x < ۰$ قرار دهید $f_i(x) = f_i(۰)$ و $g_i(x) = g_i(۰)$.
فرض کنید به ازای هر $x \geq ۰$، $f_i(x) \geq -K_۰$، $g_i(x) \geq -K_۰$. قرار دهید.... □

مثال ۴ـ۲ـ۲. فرض کنید....
آن‌گاه f_iها و g_iها در شرط‌های قضیه ۴ـ۲ـ۱ صدق می‌کنند.

قضیه ۴ـ۲ـ۳. *فرض کنید (ف۱)ـ(ف۳) برقرار باشند و به علاوه، فرض کنید f_i و g_i توابعی به اندازه کافی هموار باشند به طوری که.....*

برهان. قضیه ... را با ساختن یک جواب پایینی... □

مثال ۴ـ۲ـ۴. فرض کنید.... در شرط‌های قضیه ۴ـ۲ـ۱ صدق می‌کنند.

۴ـ۳ لاپلاس با پارامترهای چندگانه دارای...

در این بخش، ابتدا تاریخچه مختصری در مورد مسائل ....

ملاحظه ۴ـ۳ـ۱. قضیه ..... را نتیجه می‌دهد.

مراجع

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1975).

[2] Z. Wu, J. Yin and C. Wang, *Elliptic & Parabolic Equations*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2006.

[3] V. Zhikov, *Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory*, Math. USSR Izv. **29** (1987) 33-36.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

احتمالی ..... Probabilistic
ارزیابی ..... Valuation
اندازه ..... Measure
پایدار ..... Stably
توپولوژی ضعیف ..... Weak Topology
دامنه‌توانی ..... Powerdomain
فضای تابع ..... Function Space
دامنه معنایی ..... Semantic Domain
قطعه‌برنامه ..... Program Fragment
مجموعه جزئاً مرتب کامل جهت‌دار ..... Dcpo
مرتب ..... Ordered

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

مجموعه جزئاً مرتب کامل جهت‌دار ..... Dcpo
فضای تابع ..... Function Space
اندازه ..... Measure
مرتب ..... Ordered
دامنه‌توانی ..... Powerdomain
احتمالی ..... Probabilistic
قطعه‌برنامه ..... Program Fragment
دامنه معنایی ..... Semantic Domain
پایدار ..... Stably
ارزیابی ..... Valuation
توپولوژی ضعیف ..... Weak Topology

Abstract:

In this Thesis, we discuss the existence and multiplicity of positive solutions for a class of nonlinear partial differential equations and systems with homogeneous Dirichlet boundary conditions via the method of sub- and supersolutions in two notions of classical and weak. Let Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ with smooth boundary $\partial\Omega$. First, We analyze the existence of positive solutions for the system

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = \lambda_1\, a(x)f(v) + \mu_1\, \alpha(x)h(u), & x \in \Omega, \\ -\Delta_{q(x)}v = \lambda_2\, b(x)g(u) + \mu_2\, \beta(x)\gamma(v), & x \in \Omega, \\ u = 0 = v, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where $p(x) \in C^1(\mathbb{R}^N)$ is a radial symmetric function such that $\sup|\nabla p(x)| < \infty$, $1 < \inf p(x) \leq \sup p(x) < \infty$, $a, b, \alpha, \beta : [0, +\infty) \to (0, \infty)$ is a continuous function and $\Omega = B(0, R) \subset \mathbb{R}^N$.

Keywords: Positive solutions, p- Laplacian, Weak solution, Dirichlet boundary conditions

Velayat University
Faculty of Basic Sciences

On the study solutions for a class of differential equations

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree of Master of Science in Department of Mathematics

By:

Mahammad Mahmoodi

Supervisor:

Dr. Mehdi Choubin

November 2015